Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Matemática
Matemática Discreta I - 6873
Ciência da Computação - Turma 02
Prova 2 - 10 de Junho de 2013 - 15h30min

Nome	Matrícula (RA)	Turma	Chamada	Nota

Questão 1 (2,0 pontos)
Defina $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $f(a, b) = a + bi$, onde i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$).

(a) (0,5 ptos) Mostre que f é uma função.

(b) (0,5 ptos) Mostre que f é bijetora.

(c) (1,0 pto) Determine a função inversa de f. Justifique sua resposta.

Questão 2 (3,0 pontos)
Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais com o zero e R a seguinte relação sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(a, b)\, R\, (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

(a) (1,0 pto) Mostre que R é uma relação de equivalência.

(b) (1,0 pto) Mostre que: Se $a \geq b$ então $\overline{(a, b)} = \overline{(a - b, 0)}$ e se $b \geq a$ então $\overline{(a, b)} = \overline{(0, b - a)}$.

(c) (1,0 pto) Mostre que $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R = \{\, \overline{(c, 0)} \,|\, c \in \mathbb{N} \,\} \cup \{\, \overline{(0, d)} \,|\, d \in \mathbb{N} \,\}$.

Questão 3 (2,0 pontos)
Use o Princípio de Indução para mostrar apenas uma das seguintes propriedades de $\mathbb{N}^*$:

$$(i)\ \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \qquad (ii)\ n^3 + 2n \text{ é múltiplo de 3.}$$

Questão 4 (2,0 pontos)
Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. Lembramos que se $X \subset A$, definimos $f(X)$ como sendo o conjunto $f(X) = \{y \in B \,|\, y = f(x) \text{ para algum } x \in X\} = \{f(x) \,|\, x \in X\}$. Mostre que:

(a) (1,0 pto) Se $X_1, X_2 \subset A$ e $X_1 \subset X_2$ então $f(X_1) \subset f(X_2)$.

(b) (1,0 pto) Se $X_1, X_2 \subset A$ então $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$.

Questão 5 (1,0 ponto)
Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

(a) $\emptyset \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(c) $2 \in \{\{2\}, \{3, 4\}\}$

(d) $\{2\} \not\subseteq \{\{2\}, \{3, 4\}\}$

(e) $16 \notin \{4, \{4, 4^2, 2^4\}\}$