Lógica de Predicados [1]

E. L. Monte Carmelo

Departamento de Matemática
UEM-Universidade Estadual de Maringá

2013

Conteúdo

[1] Este material é continuação da apostila *Lógica Proposicional.*

1 Predicados

A Lógica proposicional não é suficientemente poderosa para englobar todas as afirmações necessárias em matemática. Nós também precisamos lidar com expressões do tipo

$$x > 0, \;\; x + y = 20, \;\; x \geq y.$$

que não são proposições. De fato, a análise da primeira mostra que ela não assume valor V, pois "$x > 0$ " falha quando $x = 0$ e também não pode ser F, pois "$x > 0$ " vale quando $x = 1$. Sentenças análogas ocorrem também na nossa língua: "Ela vive em Maringá" pode ser reformulada como

x vive em Maringá.

onde x é variável e "vive em Maringá " é um predicado.

Dicionários apresentam as seguintes definções do vocábulo *predicado*: "atributo ou propriedade característica de alguma coisa", "termo da oração no qual se enuncia um fato ou se diz alguma coisa do sujeito", por exemplo:

(1) "_________estuda lógica "
(2) "_________é maior do que zero. "

Note que tais predicados não assumem valores-verdade. Para torná-los propoções, é necessário especificar o sujeito, por exemplo:

(1) " Alexandre estuda lógica. "
(2) " Dois é maior que zero."

Vamos nos fixar no segundo exemplo. Com a variação do sujeito na oração, digamos:

" Dois é maior que zero."
" Cinco negativo é maior que zero."

obtemos distintas proposições (cada sujeito forma uma proposição).

A fim de estudarmos esta classe de proposições, podemos denotar o predicado "é maior que zero", "> 0" por P, e associá-lo a um sujeito genérico x:

$$P(x) : \text{“}x > 0'' \qquad \text{ou ainda} \qquad P(x) := \text{“}x > 0''$$

Desta forma, as duas últimas proposições ficam: $P(2)$ e $P(-5)$. Note que $P(x)$ não assume valor V ou F quando o sujeito x não está especificado.

Cabe um comentário. Com a variação do sujeito x, novas proposições $P(x)$ são geradas. Formalmente, denote por $\mathcal{C}$ uma classe de proposições. Dado o universo $\mathcal{U}$, um predicado P pode ser visto como uma função abaixo

$$\begin{aligned} P:\ \mathcal{U} &\to \mathcal{C} \\ x &\to P(x) \end{aligned}$$

2 Quantificadores

Repare agora nas sentenças

Alguém vive em Maringá.
Todos os números são maiores que zero

As palavras grifadas indicam, de uma forma ou de outra, a ideia de quantidade.

O interesse do *cálcudo de predicados consiste em "quantificar"* os predicados, obtendo-se e estudando-se classes de proposições. Ao invés de isolarmos proposições $P(1), P(2)$,... estaremos interessado no estudo simultâneo de toda a classe de proposições $P(x)$ obtidas através de um dado predicado P. Para tanto, a estratégia será quantificar os predicados e as formas mais comuns envolvem dois quantificadores: universal (para todos) e existencial (existe algum) denotados por $\forall$ e $\exists$, respectivamente. Daqui em diante, $P(x)$ denota um predicado arbitrário com variável x.

2.1 Operador Universal: $\forall$

Seja $P(x)$ um predicado com variável x. A proposição:

"Para todo sujeito x, a afirmação $P(x)$ é verdadeira",

denotada simbolicamente por

$$\forall x P(x)$$

está associada ao predicado cuja variável x foi quantificada universalmente.

O operador $\forall x P(x)$ é verdadeiro quando absolutamante todas as proposições $P(x)$ são válidas na medida que variamos x.

Retornemos ao nosso predicado $P(x)$: "$x > 0$ ". Se dissermos: "para todo natural positivo x, $x > 0$ " é agora sim uma proposição verdadeira, pois $P(1), P(2), P(3), \ldots$ são todas verdadeiras. No entanto, se dissermos, "para todo x número inteiro, $x > 0$ " é uma proposição falsa, pois, digamos, P(-1) falha. Repare que basta encontrar apenas um $P(x_0)$ falso, onde x_0 é convenientemente escolhido, para que $\forall x P(x)$ receba valor F.

Assim, é necessário também especificar em qual *universo do discurso* $\mathcal{U}$, universo a qual x pode assumir valores, para que a operação fique bem definida. No primeiro e segundo caso acima, $\mathcal{U}$ coincide com o conjunto dos naturais positivos e inteiros, respectivamente.

Dizer que $\forall x P(x)$ é falso no universo $\mathcal{U}$ significa que existe algum $x_0 \in \mathcal{U}$ onde $P(x_0)$ falha.

2.2 O operador existencial: $\exists$

A frase "para algum $x, P(x)$" simplifica:

> "Existe pelo menos um sujeito x para o qual a afirmação $P(x)$ é verdadeira."

foi quantificada existencialmente e será denotada simbolicamente por

$$\exists x P(x).$$

Note que $\exists x P(x)$ busca, dentro do universo $\mathcal{U}$ se há algum sujeito tal que torne a sentença (relativa ao sujeito) verdadeira. Se tal elemento for encontrado, $\exists x P(x)$ recebe valor V, caso contrário, será F.

2.3 Uso de quantificadores

Exemplo 2.1. Seja $\mathcal{U}$ o conjunto dos números naturais positivos e $P(x)$ o predicado "$x^2 = x$". Então $\forall x P(x)$ é falso porque $P(3)$ é falso. Por outro lado, $\exists x P(x)$ é verdadeiro porque pelo menos uma das proposições $P(x)$ se verifica, embora exista apenas uma proposição válida, quando $x = 1$.

Exemplo 2.2. Se o universo é o conjunto dos números inteiros, então:

$$\begin{array}{lll} \exists x[x=3] \text{ é V} & \exists x[x+2=2] \text{ é V} & \exists x[x<x+1] \text{ é V} \\ \forall x[x=3] \text{ é F} & \forall x[x+2=2] \text{ é F} & \forall x[x<x+1] \text{ é V} \end{array}$$

Exemplo 2.3. Para os números naturais positivos como universo de discurso, seja $Q(x)$ o predicado "$x^2 + x + 41$ é primo".

Claramente $\exists x Q(x)$ é V, pois $Q(1)$ vale. Inspeções para $x = 1, 2, 3, \ldots$ mostram que $Q(1), Q(2), Q(3), \ldots$ são válidos, levando-nos a tentação de considerar $\forall x Q(x)$ também verdadeiro. (Convém alertar aqui que este procedimento pouco cuidadoso pode gerar erros). Embora $Q(1), Q(2), \ldots, Q(39)$ sejam todos verdadeiros, $Q(40)$ é falso. Por outro lado, se o universo fosse $\mathcal{U} = \{1, 2, \ldots, 30\}$, ambas $\exists x P(x)$ e $\forall x Q(x)$ seriam válidas.

Assim como utilizamos os conectivos lógicos em proposições, podemos operá-los também em predicados, formando sentenças mais complexas. Aproveitando os exemplos acima, $\sim Q(n)$ representa o predicado "$n^2 + n + 41$ não é primo". Aplicando os conectivos lógicos já conhecidos, podemos criar as proposições: $\forall x(Q(x) \to P(x))$, $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ etc. Tente determinar os respectivos valores verdade.

Exemplo 2.4. Aproveitando os predicados acima $P(x) :=$ "$x^2 = x''$ e $Q(x) :=$ "$x^2 + x + 41$ é primo" e o universo $\mathcal{U} = \mathbb{N}^*$, vamos calcular as proposições:

$$\exists x[\ P(x) \to Q(x)\ ] \qquad \forall x[\ P(x) \to Q(x)\ ]$$

Um estratégia de solução é simplificar a expressão por meio de predicado auxiliar. Neste caso, definimos o predicado $R(x) := P(x) \to Q(x)$. Basta estudar $\exists x R(x)$ e $\forall x R(x)$. Como $P(1)$

e $Q(1)$ são V, a tabela verdade do condicional garante que $R(1)$ é V e, como consequência, $\exists x R(x)$ é V. Consideremos um natural $x \geq 2$ fixo. Logo $P(x)$ e $Q(x)$ comportam-se como proposições. Neste caso, já vimos que $P(x)$ é F. Independente do valor de $Q(x)$, o condicional $P(x) \to Q(x)$ será V. O raciocínio é válido para todo $x \geq 2$. Logo $\forall x R(x)$ é também V.

Observação 2.5. (*) Quando o universo do discurso é finito, digamos $\mathcal{U} = \{1, 2, \ldots, n\}$, as proposições $\forall x P(x)$ e $\exists x P(x)$ podem ser simuladas via procedimentos computacionais. De fato, vamos determinar o valor verdade de $\exists x P(x)$, onde P é um predicado fixado. Precisamos assumir que cada $P(i)$, $1 \leq i \leq n$, é decidível computacionalmente, em outras palavras, existe uma função computacional booleana f que determina o valor verdade $f(P(i))$ para cada proposição $P(i)$, ou seja, $f(P(i)) =$ "$true$" se $P(i)$ é verdadeira, e "$false$" caso contrário. O procedimento abaixo está em "pseudo-Pascal". **Dados iniciais**: $\mathcal{U} = \{1, 2, ..., n\}$ e o predicado P. **Saída**: o valor de $\exists x P(x)$.

$$\begin{cases} P\text{: vetor de comprimento } n\text{: } \{P[1], P[2], ..., P[n]\} \\ \text{b: variável boolena, i: contador} \\ \textbf{Begin}\text{: b:=false, i:=0} \\ \text{While ((b=false) and } (i < n\ ) \text{ do} \begin{cases} i := i + 1 \\ \text{b:=}f(P[i]) \end{cases} \\ \text{Write(b); } \textbf{End} \end{cases}$$

Note que o valor verdade de $\exists x P(x)$ concide com a variável boolena b.

3 Predicado com mais de uma variável.

A utilização de predicados na lógica engloba situações bem mais abrangentes, por exemplo, o predicado "vive em Maringá" pode ser generalizado a $P(x, y)$: "x vive na cidade y", fazendo com que tal sentença dependa agora de duas variáveis: x(sujeito) e y(cidade em questão).

Analogamente, podemos considerar predicados que dependam de uma ou mais variáveis e utilizar quantificadores para cada uma delas.

Definição 3.1. Como $P(x)$ se tranforma em proposição na medida que atribuímos valores específicos para x, dizemos então que x é variável *livre,* pois o valor verdade fica dependendo de x. No entanto, o valor verdade de $\forall x P(x)$ não depende de x, e assim dizemos que x é variável *ligada.*

Exemplo 3.2. Calculemos as proposições

$$\exists x \exists y\ (x = 2y) \qquad \forall x \exists y\ (x = 2y) \tag{3.1}$$

onde o universo de ambas as variáveis x e y é o conjunto dos números inteiros. Resolução: o predicado $x = 2y$ apresenta ambas as variáveis livres. Como a expressão interna $\exists y\ (x = 2y)$ apresenta x como variável livre e y como variável ligada, passa a ser um predicado que **depende apenas** de x. Defina então o predicado $P(x) := \exists y\ (x = 2y)$, que só depende de x. Agora as proposições em (3.1) correspondem a

$$\exists x P(x) \qquad\qquad \forall x P(x). \tag{3.2}$$

Novamente recorremos ao uso de predicado auxiliar. Qual a vantagem? O predicado com duas variáveis é reduzido a uma variável em (3.2), e neste ambiente sabemos trabalhar.

Afirmamos que $P(6) := \exists y\ (6 = 2y)$ é V. De fato, o predicado $6 = 2y$ só depende agora de y. Como $y = 3$ satisfaz tal predicado, $P(6)$ é V. Olhamos agora para a variável x. O sujeito $x = 6$ torna o predicado $P(x)$ válido, e assim $\exists x P(x)$ é V. Com ajuda do predicado auxiliar, trabalhamos primeiro com uma variável, e depois com a outra.

Para que $\forall x P(x)$ seja F, basta exibir um inteiro onde o predicado $P(x)$ falha. Pois bem, afirmamos que $P(7)$ é F. Como justificar? Sabemos que a única solução de equação $7 = 2y$ é $7/2$, que não é um número inteiro. Em outra palavras, nenhum inteiro satisfaz tal equação.

Exemplo 3.3. Considere os números naturais positivos como universo de discurso $\mathcal{U}$ para ambas variáveis e $P(x, y)$ o predicado "$x < y$ ". Note que ele assume agora o papel de uma função: P: $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{C}$: $(x, y) \to P(x, y)$. Ambas as variáveis x e y estão livres, no sentido que o valor verdade de $P(x, y)$ depende de ambas as variáveis x e y. Na sentença $\exists x P(x, y)$, x é variável ligada, mas y é livre, de modo que ela ainda não assume valor verdade. O predicado $\exists x P(x, y)$, " existe um x tal que $x < y$ ", se transforma em proposição na medida que atribuímos valores específicos para y, por exemplo: $\exists x P(x, 1)$ é F, $\exists x P(x, 2)$ é V (pois $x = 1$ satisfaz a sentença), e assim por diante. Agora valor-verdade de $\exists x P(x, y)$ não depende de x (x está ligada) mas depende de y, ou seja, apresenta y como variável livre e pode ser pensada como um novo predicado que apenas depende de y. Desta forma, podemos quantificar tal variável, tranformando finalmente numa proposição. Se quantificamos com o operador universal, a proposição $\forall y \exists x P(x, y)$ é F, pois $\exists x P(x, 1)$ é F. Por outro lado, com o operador existencial, $\exists y \exists x P(x, y)$ é V (desde que $\exists x P(x, 2)$ é V, basta tomar $y = 2$).

Há oito modos de quantificar um predicado $P(x, y)$ com duas variáveis:

$$\begin{array}{cccc} \forall x \forall y, & \forall x \exists y, & \forall y \forall x, & \forall y \exists x \\ \exists x \forall y, & \exists x \exists y, & \exists y \forall x, & \exists y \exists x \end{array}$$

Uma questão natural é saber se os quantificadores podem ser comutados, ou seja, se a ordem deles importa no enunciado. Para responder esta pergunta, vejamos o exemplo abaixo.

Exemplo 3.4. Este exemplo ilustra a importância da ordem dos quantificadores. Considere $P(x, y)$ o predicado : " y é mãe de x". Para a variável x, seja o universo do discurso a população mundial que está viva; e inclua as pessoas falecidas no universo da variável y. Apresentamos alguns modos de quantificá-la seguido com a respectiva interpretação e valor-verdade:

(1) $\forall x \exists y P(x, y)$	" qualquer pessoa tem uma mãe " (V)
(2) $\exists y \forall x P(x, y)$	" alguma pessoa é mãe de todo mundo "(F)
(3) $\forall y \exists x P(x, y)$	" todo mundo é uma mãe. "(F)
(4) $\exists x \forall y P(x, y)$	" uma pessoa é filho de todo mundo " (F)

Note que as frase (1) e (2) apresentam enunciados e até valores distintos, embora a única diferença das fórmulas seja a ordem dos quantificadores. Analogamente, vale para as frases (3) e (4); refletindo a importância da ordem dos quantificadores.

Exemplo 3.5. Considere o universo de x e y os naturais positivos e o predicado $P(x,y)$: "$y > 2^x$."

(a) Para determinar a proposição $\forall x(\exists y P(x,y))$, inicialmente consideramos o predicado interno $\exists y P(x,y)$, onde y está ligada e x livre. Assim, tal expressão pode ser vista como um predicado na variável x e então, atribuindo valores para x, obtemos: $\exists y P(1,y)$ é V (pois para $y = 3$, torna $P(1,3)$ válida), $\exists y P(2,y)$ é V (pois $5 > 4$) e assim por diante. O caso geral $\forall x \exists y P(x,y)$: " para todo número x, existe um número y maior que 2^x" é V (basta tomar $y = 2^x + 1$).

(b) Se invertermos o ordem dos quantificadores, $\exists y \forall x(P(x,y)$, lido " existe um número y maior que todas as potências na base 2" é F. De fato, o predicado interno $\forall x P(x,y)$, que significa " para todo x, $y > 2^x$", é sempre F para todo y, basta tomar $x = y$ e daí obtemos $y > 2^x$ que é F.

Exemplo 3.6. Muito conceitos matemáticas são definidos através de predicados. Vejamos alguns exemplos.

Universo das variáves	conceito (predicado)	definição do conceito
números inteiros	x é par	$\exists y\ x = 2.y$
números inteiros	x é número quadrado	$\exists y\ x = y^2$
números inteiros	a divide b	$\exists y\ b = y.a$
números reais	x é inversível	$\exists y\ x.y = 1$
matrizes reais 2×2	x é inversível	$\exists y\ x.y = I$ I=matriz identidade

O primeiro predicado foi explorado no Exemplo 3.2. Naquele exemplo, a traduçao de $\exists x P(x)$ corresponde à frase "Existe um inteiro par", enquanto que $\forall x P(x)$ significa "Todo número inteiro é par".

Exemplo 3.7. Mais ainda, muitas propriedades matemáticas podem ser expressa em termos de predicados. Vejamos formulações lógicas de algumas propriedades dos números reais:

$\forall x \forall y \forall z\,[x.(y+z) = xy + xz]$	o produto é distributivo
$\exists y \forall x\,[x + y = x]$	existe elemento neutro para a soma
$\forall x \exists y\,[x + y = 0]$	todo número real tem oposto
$\forall x\,[x \neq 0 \to (\exists y \quad x.y = 1)]$	todo real diferente de zero possui inverso

Exemplo 3.8. (*) O uso da predicados aparece praticamente em todos os conceitos da matemática. Ilustremos um exemplo na geometria analítica. Dados dois vetores u e v em $\mathbb{R}^3$, dizemos que o conjunto $\{u,v\}$ é *linearmente dependente* se um deles é um múltiplo escalar do outro. A tradução lógica fica da seguinte forma. Denote o predicado de duas variáveis (vetores) "$\{u,v\}$ é linearmente dependente" por $P(u,v)$. O universo da variável α é o conjunto dos números reais. Desta forma

$$P(u,v) := \exists \alpha\,(u = \alpha.v) \vee (v = \alpha.u),$$

onde . denota o produto escalar.

4 Cálculo de predicados

No cálculo proposicional, podemos criar proposições novas combinando conecticos lógicos sobre proposições mais simples. Tautologias nos permitem criar regras de equivalência entre proposições, as quais são usadas na simplificação de expressões lógicas. Há também regras de inferências.

Utilizaremos os recursos já vistos em lógica proposicional para estudarmos a lógica de predicados.

Nos próximos comentários, denotamos por P e Q duas proposições quaisquer e $P(x)$ e $Q(x)$ dois predicados quaisquer, ambos com variável livre x.

1. Assim como fizemos com as proposições, podemos criar naturalmente novos predicados via conectivos lógicos, a saber:

$$\begin{array}{lll} \sim P(x) & P(x) \wedge Q(x) & P(x) \vee Q(x) \\ & P(x) \rightarrow Q(x) & P(x) \leftrightarrow Q(x) \end{array}$$

2. Algumas identidades lógicas: ($\equiv$) para predicados também podem ser "importadas " do cálculo proposicional. Citamos:

Proposicões	*Predicados*
$P \equiv \sim\sim P$	$P(x) \equiv \sim\sim P(x)$
$P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$	$P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \sim P(x) \vee Q(x)$

3. Lembramos que os predicados quantificados em todas as variáveis (por exemplo: $\forall x P(x)$, $\exists x \forall y R(x, y)$) são transformados em proposições e podem ser estudadas como tais.

Há também tautologias próprias nos predicados. Citamos alguns casos particulares. Dizer que "Todas as bolas são brancas " tem o mesmo significado de "Não há bola de outra cor ". Em notação lógica, $\forall x P(x) \ \equiv \sim \exists x \sim P(x)$, onde $P(x)$ denota o predicado "ser bola branca ". Analogamente, dizer que "Nem todas as bolas são brancas " tem o mesmo significado de "Há uma bola de outra cor", ou simbolicamente: $\sim \forall x P(x) \equiv \exists x \sim P(x)$. A substituição do predicado não invalida a equivalência lógica. Acabamos de ilustrar relações entre os quantificadores. Devido à sua importância, estudaremos tautologias desta natureza isoladamente.

Teorema 4.1. *As tautologias são válidas:*

$$\begin{array}{ll} 1) & \sim \forall x P(x) \equiv \exists x\,(\sim P(x)) \\ 2) & \sim \exists x P(x) \equiv \forall x\,(\sim P(x)) \\ 3) & \forall x P(x) \ \equiv \sim \exists x\,(\sim P(x)) \\ 4) & \exists x P(x) \ \equiv \sim \forall x\,(\sim P(x)) \end{array}$$

Demonstração: Vamos considerar a primeira delas. Devemos lembrar que $\sim \forall x P(x) \equiv \exists x\,(\sim P(x))$ se e somente se $\sim \forall x P(x) \leftrightarrow \exists x\,(\sim P(x))$ é tautologia. Assim, basta verificar que as proposições $\sim \forall x P(x)$ e $\exists x\,(\sim P(x))$ assumem sempre o mesmo valor-verdade. De fato, se $\sim \forall x P(x)$ é V, então $\forall x P(x)$ é F, ou seja, existe pelo menos um x tal que $P(x)$ é falso, ou equivalentemente, existe pelo menos um x tal que $\sim P(x)$ é V, e esta última frase pode ser interpretada por $\exists x \sim P(x)$. As outras podem ser obtidas a partir da primeira ou via argumentos como acima. □

Seja P um predicado com universo de discurso formado pelos elementos 1 e 2. Aplicando a tautologia (1) acima, temos:

$$\sim (P(1) \wedge P(2)) \equiv \sim \forall x P(x) \equiv \exists x\,(\sim P(x)) \equiv \sim P(1) \vee \sim P(2)$$

Note que assim obtemos novamente a lei de De Morgan (ver regras na apostila de lógica proposicional). Por esta razão, as regras acima são chamadas Leis De Morgan generalizadas.

A regra (3) acima afirma que podemos obter o quantificado $\exists$ partindo do quantificador $\forall$ e da negação $\sim$. Enquanto a regra (4) afirma resultado análogo para o quantificador $\forall$. Desta forma, basta um quantificador (e os conectivos lógicos) para gerar todas as fórmulas na lógica de predicados.

As regras (1) e (2) são utilizadas para o cálculo da negação de um quantificador. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 4.2. Digamos que um estudante, quando está aprendendo equações literais, acredite na validade da seguinte lei:

$$\forall x \left[(x+1)^2 = x^2 + 1\right]$$

Nós podemos alertar ao estudante que a lei é falsa mostrando que sua negação é verdadeira, ou seja, que $\exists x \left[(x+1)^2 \neq x^2 + 1\right]$ se cumpre, basta tomar ou $x = 1$, ou $x = 2$.

Exemplo 4.3. Vamos calcular a negação de $\forall x \forall y \left(x < y \to x^2 < y^2\right)$. Aplicando o Teorema 4.1,

$$\sim \left[\forall x \forall y \left(x < y \to x^2 < y^2\right)\right] \equiv \exists x \sim \left[\forall y \left(x < y \to x^2 < y^2\right)\right] \equiv \exists x \exists y \sim \left(x < y \to x^2 < y^2\right).$$

As identidades lógicas DC e DM afirmam que $\sim (P \to Q) \equiv \sim (\sim P \vee Q) \equiv P \wedge \sim Q$, portanto vale a identidade $\sim \left(x < y \to x^2 < y^2\right) \equiv (x < y) \wedge (x^2 \geq y^2)$. Finalmente, a negação fica

$$\exists x \exists y \left((x < y) \wedge (x^2 \geq y^2)\right).$$

Exemplo 4.4. (*) Retornemos ao Exemplo 3.8. Recorde que o conjunto $\{u, v\}$ é *linearmente independente (LI)* quando o conjunto $\{u, v\}$ **não** é linearmente dependente, ou seja, $\sim$

$P(u, v)$. Vamos expressar a condeção LI por meio do Teorema 4.1? O conjunto $\{u, v\}$ é *linearmente independente (LI)* equivale a:

$$\begin{aligned}
&\sim [\exists \alpha\, (u = \alpha.v) \vee (v = \alpha.u)] \equiv \text{ (Teorema 4.1)}\\
&\forall \alpha \sim [(u = \alpha.v) \vee (v = \alpha.u)] \equiv \text{ (regra DM)}\\
&\forall \alpha\ [(\sim u = \alpha.v) \wedge \sim (v = \alpha.u)] \equiv\\
&\forall \alpha\ [(u \neq \alpha.v) \wedge (v \neq \alpha.u)]\,.
\end{aligned}$$

A última expressão nos diz que o conjunto $\{u, v\}$ é LI quando um não pode ser escrito como múltiplo escalar do outro, conforme aprendemos na Gemetria Analítica.

Exemplo 4.5. (*) Vejamos uma ilustração das propriedades acima no âmbito do cálculo. O limite $\lim_{x \to a} f(x) = L$ pode ser reformulado no âmbito da lógica de predicados conforme descrição abaixo:

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x\, (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)\,.$$

Algumas vezes precisamos verificar que $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$. Tentar determinar a negação do limite diretamente pode causar confusão, pois tal fórmula envolve três quantificadores. O uso do Teorema 4.1 pode ser muito útil, como por exemplo neste caso. Assim, $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$ é equivalente a:

$$\begin{aligned}
&\sim [\forall \varepsilon \exists \delta \forall x\, (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)] \equiv\\
&\exists \varepsilon \sim [\exists \delta \forall x\, (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)] \equiv\\
&\exists \varepsilon \forall \delta \sim [\forall x\, (0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)] \equiv\\
&\exists \varepsilon \forall \delta \exists x \sim [(0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)] \equiv\\
&\exists \varepsilon \forall \delta \exists x \sim [\sim (0 < |x - a| < \delta) \vee (|f(x) - L| < \varepsilon)] \equiv\\
&\exists \varepsilon \forall \delta \exists x\, [(0 < |x - a| < \delta) \wedge \sim (|f(x) - L| < \varepsilon)] \equiv\\
&\exists \varepsilon \forall \delta \exists x\, [(0 < |x - a| < \delta) \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon]
\end{aligned}$$

Ao trabalharmos com conceitos matemáticos (provar resultados, negar etc...), estamos utilizando (explícita ou implicitamente) passos que são justificados por regras lógicas. Um relativo embasamento em Lógica é essencial para evitar passos incorretos.

Observação 4.6. (*) O célebre problema de Fermat, resolvido em 1995, depois de mais de 300 anos de incessantes pesquisas (durante este tempo, tal probema era a mais famosa conjectura em aberto em toda a matemática), consistia "simplesmente " em decidir o valor-verdade da proposição abaixo:

$$\exists_{n \geq 3} \exists x \exists y \exists z\, (x^n + y^n = z^n)$$

onde o universo do discurso compreende os números naturais positivos. A resposta para este problema é negativa.

Se tentássemos procurar uma solução do sistema via busca computacional, e se fosse encontrada, a proposição seria verdadeira. Como a resposta é falsa, significa que o programa jamais chegaria ao final.

Outros exemplos de tautologias no cálculo de predicados são:

Teorema 4.7. *Mais Tautologias:*

$$\begin{array}{ll} 5) & \forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y) \\ 6) & \exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y) \\ 7) & \exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y) \\ 8) & \quad \forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x) \end{array}$$

Outra forma de quantificação é "existe um e apenas um" elemento do universo do discurso que torna o predicado verdadeiro. Este quantificador é representado por $\exists!$. Tente expressá-lo em função dos outros conectivos e quantificadores.

5 Inferências

Análogo ao cálculo proposicional, podemos também realizar argumentos na lógica de predicados. No entanto, regras adicionais de inferência, que estão fora do nosso objetivo, são necessárias para provar afirmações envolvendo predicados e quantificadores.

Já vimos regras de inferência (proposicionais) com intuito de concluir resultados verdadeiros através de argumentos legítimos. Veremos alguns casos simples de regras de inferência em predicados:

5.1 Exemplificação universal: EU

Vamos supor o enunciado verdadeiro: "Todos somos mortais"(premissa). Considerando o predicados $M(x)$:"x é mortal ", com x no universo dos humanos, o enunciado fica: $\forall x M(x)$. Como assumimos verdadeira tal proposição, na medida que atribuímos sujeitos específicos, inferimos legitimamante as sentenças:

M(Sócrates) : " Sócrates é mortal. "
M(Kafka) : " Kafka é mortal. "

que são verdadeiras, e assim por diante. Portanto, parece plauível assumir como legítimo o argumento (regra): *o que vale para todos deve valer para um sujeito particular.* No enunciado acima, se vale $\forall x M(x)$, então vale para M(c) (conclusão), onde c é um sujeito particular.

A regra de *exemplificação universal* pode ser resumida na forma:

$$\frac{\forall x P(x)}{P(c).}$$

onde P é um predicado qualquer e c é um sujeito escolhido do discurso. Note que esta regra elimina o quantificador universal.

5.2 Generalização universal: GU

A segunda regra de inferência, denominada *generalização universal*, permite a quantificação de uma afirmação. Se mostramos que $P(c)$ vale para todo c do universo de discurso, então podemos concluir que $\forall x P(x)$. O esquema abaixo representa tal argumento (regra):

$$\frac{P(x)}{\forall x P(x)}$$

Note que esta regra inclui o quantificador $\forall$.

5.3 Exemplificação existencial: EE

Tal regra formaliza o argumento: *se P(x) vale para algum x, então P(c) vale para algum sujeito c convenientemente escolhido.* A terceira regra de inferência chamada de *exemplificação existencial* é simbolizada por :.

$$\frac{\exists x P(x)}{P(c)}$$

5.4 Generalização existencial: GE

Esta última diz: *se P(c) vale para algum sujeito, então deve valer* $\exists x P(x)$. A generelização existencial pode ser representada por

$$\frac{P(c)}{\exists x P(x)}$$

Obs: Nestas regras, ou há inclusão ou eliminação de quantificadores.

5.5 Uso das regras

A dedução no cálculo de predicados é feita usualmente pela aplicação dos passos seguintes:

1. eliminando quantificadores (regras 1 e 3).
2. "raciocinando" como no cálculo proposicional (isto é, aplicando as conhecidas regras de inferência do cálculo proposicional - modus ponens, silogismos, etc).
3. Introduzindo quantificadores (regras 2 e 4).

Vejamos exemplos:

Exemplo 5.1. Consideremos a situação:

“ Toda criança têm direito à educação”
“ Zequinha é uma criança ”
“ Logo, Zequinha tem direito à educação ”

Se $C(x)$ denota: ”x é criança”, $D(x)$: “ x tem direito à educação” e z representa Zequinha, temos:

1.	$\forall x[C(x) \to D(x)]$	premissa
2.	C(z)	premissa
3.	$C(z) \to D(z)$	1. exemplif. universal: EU
4.	D(z)	2,3 e modus ponens

O argumento é legítimo.

Exemplo 5.2. “Sócrates é mortal. Logo, alguém é mortal ”: Se M(x) denota “ x é mortal ” e s denota Sócrates, temos:

1.	M(s)	premissa
2	$\exists x M(x)$	GE

Exemplo 5.3. “Todos os ladrões são espertos, Artur não é esperto. Portanto, ele não é ladrão”. Predicados: L ser ladrão, E ser esperto, a denota Arthur.

1	$\forall x\,[L(x) \to E(x)]$	premissa
2	$\sim E(a)$	premissa
3	$L(a) \to E(a)$	1. EU
4	$\sim L(a)$	2,3 Modus Tollens

6 Métodos de provas na matemática

Uma teoria matemática (teoria dos números, teoria dos conjuntos, geometria plana, etc) inicia-se com um linguaguem própria (intrínsica à teoria). Partindo de um conjunto de *conceitos*, *definições*, *axiomas*, *postulados*, *príncipios* (sendo os três últimos, afirmações aceitas como verdades absolutas - sem demonstração), a teoria é construída passo a passo através de inferências lógicas: as premissas envolvem os conceitos e axiomas já assumidos e a conclusão é uma nova asserção derivada das anteriores. Todo o aparato lógico (regras lógicas, equivalências, implicações,...) é um recurso empregado para verificar que tal conclusão é legítima. Após obtida tal conclusão, ela pssa a fazer parte dos recursos para provar sentenças mais complexas.

Como há uma certa hierarquia quanto a importância de uma conclusão, estas recebem denominaçãoes distintas. Um *teorema* é uma afirmação devidamente demonstrada com grau máximo de importância. Um *lema* é um resultado auxiliar, frequentemente utilizado para provar um teorema. Um *corolário* é um resultado que decorre imediatamente de um teorema. Cabe ressaltar uma diferença, uma *proposição* na matemática é uma sentença demonstrada, com grau de importância menor do que a de um teorema.

Para fixar ideia, nos restringimos à teoria dos números. Os conceitos fundamentais são os próprios *números*: $\ldots, -1,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots$ e as operações: adição e multiplicação. Tomemos como axiomas todas as propriedades já conhecidas dos números: comutatividade da soma, da multiplicação, distributiva, etc. Conceitos como número *par*, *primo* não são conceitos iniciais da teoria: eles são definidos via predicados através de conceitos prévios. Resultados usando tais conceitos são provados, gerando teoremas, lemas, etc. Vamos ilustrar como aplicar os métodos de prova na teoria dos números.

Proposição 6.1. *"O quadrado de um número par é par."*

Demonstração: Denotamos por α a sentença acima. Em muitas situações o quantificador fica subentendido assim como o universo (conjunto dos números inteiros). A interpretação seria $\alpha=$"Todo quadrado de um número par é par." A reformulação lógica precisa

$$\alpha = \forall x[P(x) \to P(x^2),] \tag{6.1}$$

onde $P(x)$ denota o predicado "x é par" (definido nos Exemplos 3.2, 3.6) ajuda a entender o que precisamos fazer.

Para provarmos que α é válido, utilizamos a demonstração direta. Iniciamos retirando o quantificador através da regra EU, assim como fizemos na seção anterior. Em outra palavras, x não é pensado como uma variável, mas como um inteiro fixado.

Caso 1 : Se for escolhido um x ímpar, então $P(x)$ é F e automaticamente $P(x) \to P(x^2)$ é V, pela definição do condicional.

Caso 2 : Se for escolhido um x par, ($P(x)$ é V), precisamos provar que $P(x^2)$ é V para que $P(x) \to P(x^2)$ também seja V. Pois bem, pela definição de número par, existe um inteiro q tal que $x = 2q$. Assim $x^2 = (2q).(2q) = 2(2q^2)$, pelas propriedades já conhecidas da multiplicação. Tomando o inteiro $k = 2(q^2)$, reparamos que $x^2 = 2k$, ou seja, x^2 é um número par, $P(x^2)$ também é V.

Independente de x ser par ou ímpar, $P(x) \to P(x^2)$ sempre é V. Finalmente, repare que no argumento acima, não foi imposta restrição sobre x, ou seja, o argumento é válido para todo x. Aplicando a regra GU, a proposição α fica demonstrada. □

Observação 6.2. Salientamos que muitos livros omitem: a representação lógica 6.1, as regras envolvendo quantificadoes (EU, GU), e omitem também o raciocínio por vacuidade apresentado no Caso 1; resumindo a prova ao argumento essencial descrito no Caso 2. Optamos por uma prova detalhada para realçar as noções lógicas.

Vamos ver a recíproca de α.

Proposição 6.3. *"Se o quadrado de um número é par, então o próprio número é par.*

Demonstração: Denotamos por β a sentença acima. O quantificador novamente fica subentendido assim como o universo (conjunto dos números inteiros). A tradução lógica de β fica

$$\beta = \forall x[P(x^2) \to P(x)],$$

onde $P(x)$ denota o predicado "x é par."

Seria natural tentarmos o método direto. Aqui cabe um comentário: na prova anterior, da variável x para x^2, basta usar a multiplicação, uma operação bem definida em $\mathbb{Z}$. No entanto, da varíavel x^2 para x, devemos extrair a raiz quadrada. No entanto, nem sempre podemos aplicar tal operação no ambiente $\mathbb{Z}$! Assim não poderemos provar tal afirmação pelo método direto.

Recorremos à regra de equivalência de predicados CP. Daí o nome do método: *prova por contrapositiva.* Pela regra, basta provarmos a validade de

$$\forall x[\sim P(x) \to \sim P(x^2).]$$

Em outra palavras, provaremos que para todo x, se x é ímpar então x^2 é ímpar.

O processo é muito parecido com o anterior. Iniciamos retirando o quantificador através da regra EU.

Caso 1 : Se for escolhido um x par, então $\sim P(x)$ é F e automaticamente $\sim P(x) \to \sim P(x^2)$ é V, pela definição do condicional.

Caso 2 : Se for escolhido um x ímpar, ($\sim P(x)$ é V), precisamos provar que $\sim P(x^2)$ também é V.

Pela definição de número ímpar, existe um inteiro q tal que $x = 2q + 1$. Donde $x^2 = (2q + 1).(2q + 1) = 2(2q^2 + 2q) + 1$, pelas propriedades já conhecidas da multiplicação. Tomando $k = 2(q^2 + 2q)$, reparamos que $x^2 = 2k + 1$, com k um número inteiro. Em outra palavras, x^2 é um número ímpar, $\sim P(x^2)$ também é V.

Aplicando a regra GU, a proposição β fica demonstrada. □

Proposição 6.4. *"A soma de dois pares é sempre par."*

Demonstração: Denotamos por γ a sentença acima. Esta sentença é um pouco mais complicada: o predicado associado "se x é par e y também é par, então a soma $x + y$ é par"deve ser quantificado em ambas as variáveis com o quantificador $\forall$. A formulação lógica fica:

$$\gamma = \forall x \forall y[(P(x) \wedge P(y)) \to P(x + y).]$$

A prova segue o método direto. Iniciamos retirando os quantificadores. Fixamos x e y.

Caso 1 : Se for escolhido um x ímpar ou um y ímpar, então $P(x) \wedge P(y)$ é F, e automaticamente a fórmula é V.

Caso 2 : Se for escolhido um x par e um y par, ($P(x)$ é V e $P(y)$ é V), precisamos provar que $P(x + y))$ também é V.

Neste caso, existem inteiros q e r tais que $x = 2q$ e $y = 2r$. Assim $x + y = 2q + 2r = 2(q + r)$. Repare que $x + y$ é um número par, ou seja, $P(x + y))$ também é V.

Independente da paridade de x e y, a fórmula $(P(x) \wedge P(y)) \rightarrow P(x + y)$ sempre é V. Aplicando a regra GU, a proposição γ está demonstrada. $\square$

Definição 6.5. Um número x é *racional* se existem inteiros p e $q \neq 0$ tais que $x = p/q$. Um número irracional é um número que não é racional.

Usando raciocínios similares, tente provar as afirmações abaixo:

Proposição 6.6. *São válidas as sentenças*

1. *"A soma de dois ímpares é sempre par."*
2. *"O produto de dois ímpares é sempre ímpar."*
3. *"A soma de dois números racionais é sempre racional."*
4. *"O produto de dois números racionais é sempre racional."*

Proposição 6.7. *"O número* 7 *não é par."*

Demonstração: Uma justificativa já foi dada no Exemplo 3.2. Vejamos como seria a prova por contradição. Por absurdo, suponha que a tese seja falsa. Assumimos então que 7 é par. Pela definição de número par, existe um **inteiro**, digamos y_0 tal que $7 = 2y_0$. Como a única solução desta equação é $y = 7/2$, obrigatoriamente $y_0 = 7/2 = 3,5$, que **não é um número inteiro**. Os termos em negrito evidenciam a contradição. $\square$

Para o próximo método, vamos admitir a seguinte propriedade.

Proposição 6.8. *Se x é um número racional, existem inteiros p e $q \neq 0$ tais que $x = p/q$ satisfazendo $mdc(p, q) = 1$.*

Proposição 6.9. *"$\sqrt{2}$ é um número irracional."*

Demonstração: A prova é por contradição. Suponha que $\sqrt{2}$ é um número racional. Pela Proposição 6.8, existem inteiros p e $q \neq 0$ tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{com} \quad \mathbf{mdc(p, q) = 1}. \tag{6.2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, $2 = p^2/q^2$, ou seja,

$$p^2 = 2.q^2. \tag{6.3}$$

Em outra palavras, p^2 é par, e assim o próprio p **é par**, pela Proposição 6.3. Consideremos $p = 2k$ para algum natural k. Substituindo p na equação 6.3, temos $2q^2 = 4k^2$, ou seja, também q **é par**, novamente pela Proposição 6.3. Resumindo, ambos os números p e q são pares, contrariando a condição $mdc(p, q) = 1$. $\square$

Proposição 6.10. *"$3 + \sqrt{2}$ é um número irracional."*

Demonstração: Procedemos a prova por contradição. Cabe reparar que usaremos resultados anteriores já provados, para apresentar uma prova rápida do que aquela apresentada acima. Suponha, por absurdo, que "$3 + \sqrt{2}$ é um número irracional"seja falsa, então $3 + \sqrt{2}$ é um racional. Sabemos que -3 é um número racional. Denotamos $a = (3 + \sqrt{2}) + (-3)$. Aplicando a regra EU na Proposição 6.4, a deve ser um número racional. Por outro lado, $a = \sqrt{2}$ é número irracional, pela Proposição 6.9. Chegamos a uma contradição. $\square$

Vamos salientar um argumento usado acima.

Proposição 6.11. *"Se $\sqrt{2}$ é irracional, então $3 + \sqrt{2}$ é irracional."*

Demonstração: A prova segue pela contrapositiva: "Se $3 + \sqrt{2}$ é racional, então $\sqrt{2}$ é racional."Pelo método, usamos a hipótese "$3 + \sqrt{2}$ é racional". Basta provar a tese "$\sqrt{2}$ é racional". Esquematicamente,

$$\frac{3 + \sqrt{2} \text{ é racional.}}{\sqrt{2} \text{ é racional}}$$

De fato, como -3 e $3 + \sqrt{2}$ são racionais, aplicamos a Proposição 6.6 para inferirmos que $\sqrt{2}$ é racional. A prova está completa. $\square$

Observação 6.12. Cuidado com o que realmente foi feito: Não provamos que $\sqrt{2}$ é racional! O que provamos foi uma afirmação condicionada: "Se $3+\sqrt{2}$ é racional, então $\sqrt{2}$ é racional."

Demonstração: Apresentamos aqui uma outra maneira de provar a Proposição 6.10: aplicamos a regra MP sobre as Proposições 6.9 e 6.11. $\square$

7 O Princípio de Indução Finita- PIF

Um método poderoso de demonstração matemática é o Princípio de Indução Finita - PIF.

Muitas afirmações matemáticas são do tipo $\forall n P(n)$, onde $P(n)$ denota um predicado sobre o universo dos **naturais positivos**, aqui denotado por $\mathcal{U} = \mathbb{N}^*$. Um grande obstáculo para provar $\forall n P(n)$ é o fato de que o universo é infinito. Em muitas situações deste tipo recorremos ao PIF, cujo enunciado segue.

Teorema 7.1. *Seja $P(n)$ um predicado sobre o universo $\mathcal{U} = \mathbb{N}^*$. Suponha que as duas afirmações abaixo são verdadeiras:*

1. *$P(1)$ é verdadeiro.*
2. *Para todo natural positivo k, se $P(k)$ é verdadeiro então $P(k+1)$ também é verdadeiro.*

Nas condições acima, o PIF afirma que $P(n)$ é verdadeiro para todo natural positivo n.

O PIF afirma que o seguinte argumento é legítimo:

$$\begin{array}{l} P(1) \\ \forall k[\ P(k) \to P(k+1)\ ] \\ \hline \forall n P(n) \end{array}$$

Vamos ilustarar o método com alguns exemplos.

Proposição 7.2. *Iniciamos com a conhecida fórmula da progressão aritmética. Para todo natural n,*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Demonstração: Para aplicar o PIF, um passo importante é identificar o predicado. Neste caso, definimos o predicado

$$P(n) := \text{“}1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}.\text{”}$$

A afirmação $P(1)$ equivale a proposição lógica “ $1 = 1.2/2$”, que é claramente válida. Para fixar notação, observe que a proposição $P(2)$ equivale a proposição lógica “ $1+2 = 2.3/2$”, $P(3)$ coincide com “ $1+2+3 = 3.4/2$”, e assim sucessivamente.

Vamos ao segundo passo. Seja k um natural fixado. Desta forma, $P(k)$ comporta-se como proposição. Admitimos que $P(k)$ é verdadeiro, ou seja, vale a igualdade

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k.(k+1)}{2}. \tag{7.1}$$

Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro, ou seja,

$$1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1).((k+1)+1)}{2}. \tag{7.2}$$

Como sair da equação (7.1) e chegar à equação (7.2)? Para usar o PIF, o ponto crucial está em responder esta questão. Um análise entre os primeiros membros das equações acima já fornece a dica: a diferença entre tais membros é o fator aditivo $k+1$. Adicionando $k+1$ em ambos os membros de (7.1), obtemos

$$1 + 2 + \ldots + k + (\mathbf{k} + \mathbf{1}) = \frac{k.(k+1)}{2} + (\mathbf{k} + \mathbf{1}). \tag{7.3}$$

Ainda não chegamos a (7.2). Um simples manipulação algébrica mostra que $k.(k+1)/2 + (k+1) = (k+1).(k+2)/2$, implicando em (7.2) através de (7.3). O resultado segue pelo PIF. □

Muitos livros não explicitam o predicado. Optamos por uma prova detalhada para realçar as noções lógicas.

Proposição 7.3. *Para todo natural n, $n^2 \geq 2n - 1$.*

Demonstração: Definimos o predicado $P(n) :=$ "$n^2 \geq 2n - 1$". Como "$1 \geq 2.1 - 1$", $P(1)$ é V. Vamos ao passo indutivo. Fixado $k \geq 1$, suponha que $P(k)$ é verdadeiro, ou seja, $k^2 \geq 2k - 1$. Queremos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro, ou seja, $(k+1)^2 \geq 2(k+1) - 1$, ou equivalentemente,

$$(k+1)^2 \geq 2k + 1. \tag{7.4}$$

O desenvolvimemto de $(k+1)^2 = \mathbf{k^2} + 2k + 1$ apresenta o fator $\mathbf{k^2}$. Já podemos acionar a hipóteste indutiva $\mathbf{k^2} \geq \mathbf{2k} - \mathbf{1}$. Logo

$$(k+1)^2 \geq (\mathbf{2k} - \mathbf{1}) + 2k + 1 \tag{7.5}$$

Como obter a desigualdade (7.4) usando (7.5)? A diferença está no termo $(\mathbf{2k} - \mathbf{1})$. Como $(\mathbf{2k} - \mathbf{1}) \geq 0$, para todo k, obtemos (7.4). A asserção fica provada pelo PIF. □

Proposição 7.4. *Consideremos agora um caso da fórmula da progressão geométrica. Para todo natural positivo n,*

$$1 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Demonstração: Vamos aplicar o PIF. Para evitar confusão nos índices, convém definir o predicado associado:

$$P(n) := \text{“}1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.\text{”}$$

A afirmação $P(1)$ equivale a proposição lógica " $1 + 3 = (3^2 - 1)/2$", que é claramente verdadeira.

Para fixar notação, observe que a proposição $P(2)$ equivale a proposição lógica " $1+3+9 = (3^3 - 1)/2$".

Vamos ao segundo passo. Fixado k, $P(k)$ comporta-se como proposição. Admitimos que $P(k)$ é verdadeiro, ou seja, vale a igualdade

$$1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^k = \frac{3^{k+1} - 1}{2}. \tag{7.6}$$

Queremos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro, ou seja, a igualdade

$$1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{k+1} = \frac{3^{(k+1)+1} - 1}{2} \tag{7.7}$$

Como obter a equação (7.7) usando a equação (7.6)? Podemos iniciar com o lado esquerdo de (7.7). Notemos que

$$1+3+3^2+\ldots+3^{k+1} = [\mathbf{1+3+3^2+\ldots+3^k}] + 3^{k+1}.$$

O passo crucial é perceber que a parte em negrito já está calculada, conforme (7.6), cuja soma é $(3^{k+1}-1)/2$. Desta forma,

$$1+3+3^2+\ldots+3^{k+1} = \frac{\mathbf{3^{k+1}-1}}{\mathbf{2}} + 3^{k+1}. \tag{7.8}$$

A computação do lado direto fica:

$$\frac{3^{k+1}-1}{2} + 3^{k+1} = \frac{3^{k+1}-1+2.3^{k+1}}{2} = \frac{3^{k+2}-1}{2}. \tag{7.9}$$

Combinando as equações (7.8) e (7.9), obtemos (7.7). O resultado segue pelo PIF. □

8 Conexões entre lógica e teoria dos conjuntos.

Vamos interpretar o argumento "todos os ganhadores do prêmio Nobel são criativos, Saramago[2] ganhou este prêmio; logo, Saramago é criativo" na óptica da teoria dos conjuntos. Seja $\mathcal{U}$ o universo das pessoas e os predicados A ser prêmio Nobel, B ser criativo. Defina o conjunto dos prêmios Nobel $\mathcal{A} =\{\ x \in \mathcal{U}\ /\ A(x)\}$ e o das pessoas criativas $\mathcal{B} = \{\ x \in \mathcal{U}\ /\ B(x)\}$. Observe agora que o argumento acima:$\forall x\, [A(x) \to B(x)]$ e $A(s)$ logo $B(s)$, onde s denota Saramago tem o mesmo significado de: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $s \in \mathcal{A}$, logo $s \in \mathcal{B}$.

Dado um predicado A, selecionar todos os sujeitos x do universo $\mathcal{U}$ tais que satisfaçam a setença $A(x)$ induz a "criação " de um conjunto $\mathcal{A} =\{\ x \in \mathcal{U}\ /\ A(x)$ é verdadeiro$\}$, ou simplesmente $\mathcal{A} =\{\ x \in \mathcal{U}\ /\ A(x)\}$. Note que $A(x)$ representa a cláusula para a escolha de x.

Certamente $\mathcal{A}$ é subconjunto de $\mathcal{U}$. Mais ainda, $\mathcal{A} = \mathcal{U}$ se $A(x)$ é satisfeita para todo x, ou seja $\forall x A(x)$ é verdadeira. Por outro lado, $\mathcal{A} = \emptyset$ quando sempre falha $A(x)$, ou seja $\exists x A(x)$ é falso. Assim, acabamos de verificar as relações :

Proposição 8.1. *Em vista das notações acima, temos as equivalências:*

$$\begin{array}{lll} \textit{(1)} & \mathcal{A} = \mathcal{U} & \forall x A(x) \text{ é } V \\ \textit{(2)} & \mathcal{A} = \emptyset & \exists x A(x) \text{ é } F \end{array}$$

As "coincidências" não param por aí. Vamos aprofundar a ligação entre lógica e conjuntos. Vimos operações lógicas e também operações sobre conjuntos. Elencamos abaixo uma lista de algumas conexões. Para os nossos propósitos, além de A, inclua os predicados B e C e seus respectivos conjuntos induzidos: $\mathcal{B} = \{\ x \in \mathcal{U}\ /\ B(x)\}$ e $\mathcal{C} = \{\ x \in \mathcal{U}\ /\ C(x)\}$. O símbolo s denota um sujeito particular de $\mathcal{U}$.

[2]Saramago: escritor português.

Proposição 8.2. *São válidas as conexões:*

(3)	$s \in \mathcal{A}^c$(*complementar de* $\mathcal{A}$)	$A(s)$ *é* F
(4)	$s \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$	$A(s) \vee B(s)$ *é* V
(5)	$s \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$	$A(s) \wedge B(s)$ *é* V
(6)	$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$	$\forall x\, [A(x) \rightarrow B(x)]$
(7)	$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ *se e somente se* $\mathcal{B}^c \subseteq \mathcal{A}^c$	$\forall x\, [A(x) \rightarrow B(x)] \equiv \forall x\, [\sim B(x) \rightarrow \sim A(x)]$

Muitas outra conexões podem ser obtidas , por exemplo a transitividade de $\subseteq$ é traduzido para a transitividade da implicação em predicados, ou seja, "se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ então $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ " é equivalente a "se $\forall x\, [A(x) \rightarrow B(x)]$ e $\forall x\, [B(x) \rightarrow C(x)]$ então $\forall x\, [A(x) \rightarrow B(x)]$ ".

Resutagos da teoria dos conjuntos podem ser obtidos através de aplicações da inferências lógicas.

Exemplo 8.3. O resultado " se $s \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ e $s \notin \mathcal{B}$ então $s \in \mathcal{A}$ " é uma simples consequência do silogismo disjuntivo: " se $A(s) \vee B(s)$ e $\sim B(s)$ logo $A(s)$.

Em outras situações, o uso de conjuntos facilita o entendimento de alguns enunciados lógicos:

Exemplo 8.4. Vamos verificar se é sempre válida a implicação:

$$[(\exists x A(x)) \wedge (\exists x B(x))] \rightarrow \exists x\, [A(x) \wedge B(x)]$$

Pelas linhas (2) e (5), este resultado é equivalente a

$$\text{se } \mathcal{A} \neq \emptyset \text{ e } \mathcal{B} \neq \emptyset \text{ então } \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$$

Tome, por exemplo, $\mathcal{A}$ o conjunto dos números pares e $\mathcal{B}$ os ímpares. Então o resultado acima não se verifica e, por consequência, a implicação também não.

As veses, fica mais fácil interpretar os argumentos através de resultados já conhecidos da teoria dos conjuntos. Talvez o exemplo abaixo convença o leitor.

Exemplo 8.5. Dadas as premissas: "(1) minhas panelas são as únicas coisas feitas de lata que possuo ", "(2) acho todos seu presentes muito úteis ", "(3) Nenhuma das minhas panelas tem a menor utilidade ". Encontre uma conclusão. *Resolução*: Seja $\mathcal{U}$ o conjunto de todas as coisas que possuo, A o conjunto das feitas de lata, B minhas panelas, C minhas coisas úteis e D as que foram presentes seus. Então (1),(2),(3) se traduzem como A=B, D$\subseteq C, B \cap C = \emptyset$. Mas $B \cap D \subseteq B \cap C$, pois D$\subseteq C$. Assim $B \cap D = \emptyset$ e portanto $A \cap D = \emptyset$, ou seja, "nenhum dos presentes que você me deu é feito de lata. "

Agradecimentos: Aos professores Doherty Andrade (a primeira versão desta monografia foi feita graças a sua colaboração), Matofu, João Gerônimo, pelo incentivo. Agradeço à prof. Irene Nakaoka, pelo estímulo e comentários. Aos acadêmicos da matemática, ciêncais da computação, informática, que apontaram inúmeros erros nas versões prévias; e a Bruno Koga, por apresentar alguns exemplos e observações.

Referências

[1] W.A. Carnielli, *Introdução à Lógica - Notas de aula*, IMECC-Unicamp, (1991).

[2] S.S. Epp, *Discrete Mathematics with Applications*, Wadsworth Publ., New York, USA, (1990).

[3] H.G. Camphell e R.E. Spencer, *Finite Mathematics*, Macmillian Publ., Canadá, (1974).

[4] L. Hegenberg, *Lógica, Simbolização e Dedução*, EDUSP, Universidade de São Paulo, (1975).

[5] L. Hegenberg, *Lógica - Exercícios IV Dedução no Cálculo de Predicados*, EDUSP, Universidade de São Paulo, (1978).

[6] R. Johnsonbaugh, *Essencial Discrete Mathematics*, Macmillian Publ., New York, (1987).

[7] G. Robinson, *An Introduction to Mathematical Logic*, Prentice-Hall, New York, (1969).

[8] P. Suppes e S. Hill, *Primeiro curso de lógica matemática*, Ed. Reverté, (1968).

[9] A. Tarski, *Introduccioón a la lógica, y a la metodología de las ciencias deductivas*, Espasa-Calpe, Madrid, (1968).