Lógica Proposicional

E. L. Monte Carmelo

Departamento de Matemática
UEM-Universidade Estadual de Maringá

2013

Conteúdo

1 Introdução

Nestas notas apresentamos alguns tópicos de Lógica, tendo em vista as disciplinas Fundamentos de Matemática (curso de Matemática) e Matemática Discreta (cursos de Ciências da Computação e Informática). Como as disciplinas acima são ofertadas aos calouros, optamos por uma abordagem *informal* e *introdutória*, e portanto não há pré-requisito formal para a leitura. A apostila não enfatiza aplicações, simplesmente expõe noções da teoria para que o aluno possa utilizá-las em outras disciplinas no decorrer do seu curso.

Em particular, algumas tarefas são imprescindíveis aos estudantes de matemática e a ciência da computação:

- uso correto de conectivos lógicos (quase todos os dias pessoas geram ambiguidades de comunicação devido ao uso incorreto de "ou", "todos ", inclusive em algoritmos).
- discernir argumentos válidos e também verificar se as conclusões obtidas são realmente válidas.
- aprender as principais técnicas de demonstração em matemática.

Algumas relações superficiais entre Lógica e outras disciplinas são comentadas de tal modo que a omissão da leitura nestes pontos não acarretará prejuízo no entendimento. Elas são marcadas por **(*)**. Por outro lado, os exemplos envolvendo propriedades matemáticas e notações lógicas tentam elucidar conceitos importante da Lógica, e recomendamos aos acadêmicos uma leitura atenta nestes pontos.

Comentaremos brevemente algumas aplicações da Lógica na Computação.

Não é raro algoritmo apresentar erros de sintaxe e lógicos. A compilação pode detectar erros do primeiro tipo, mas não impede que ainda persistam erros lógicos, os quais geram gasto de tempo de recursos humanos (custos) na busca das falhas. Não é difícil inferir a grande utilidade de um algoritmo que realize a seguinte tarefa: decidir se um determinado programa entra em "loop infinito" ou não. No entanto, é impossível construir tal algoritmo. Este resultado implica que há limites reais na teoria da computação. Resultados desta natureza são encontrados em Computabilidade, uma área entre a Computação e Lógica.

O mecanismo de funcionamento dos circuitos eletrônicos encontrados nos computadores ("hardware") é regida pela Lógica de Boole. Quando Boole concebeu esta teoria, ele acreditava equivocadamente que ela serviria apenas a fins estritamente teóricos.

Computabilidade, Inteligência Artificial, Redes Neurais, Hardware, ou mesmo desenvolvimento de algoritmos, são áreas de pesquisa em Computação que utilizam recursos lógicos em grau variado de complexidade.

Um dos objetivos é propiciar subsídios teóricos de lógica para que o acedêmico possa usá-los como ferramenta de trabalho, por exemplo: evitar (e se for o caso, reconhecer mais rapidamente) erros usuais cometidos em programação ou mesmo em demonstrações matemáticas. De fato, a tradução adequada de conceitos matemáticos em linguagem lógica facita o entendimento de muitas demonstrações e propriedades.

Agradecimentos: Aos professores Doherty Andrade (a primeira versão desta monografia foi feita graças a sua colaboração), Matofu, João Gerônimo, pelo incentivo. Agradeço à prof.

Irene Nakaoka, pelo estímulo e comentários. Aos acadêmicos da matemática, ciêncais da computação, informática, que apontaram inúmeros erros nas versões prévias; e a Bruno Koga, por apresentar alguns exemplos e observações.

2 Proposições

A clássica Lógica Proposicional estuda relações lógicas entre objetos chamados proposições, os quais podem usualmente (nem sempre) ser interpretadas como sentenças da Língua Portuguesa.

Por sua vez, sentenças podem ser de vários tipos: *declarativas* (afirmações), *interrogativas*, *modais* (por exemplo, "parece que o carro do Zé é vermelho"), *performáticas* (ou de comandos) (por exemplo, o termo " go to" do Pascal.)

Vamos nos preocupar aqui apenas com as sentenças declarativas, simplesmente porque estas são suficientes para o estudo da Matemática.

A princípio, podemos ter a impressão de que toda sentença declarativa é falsa ou verdadeira. Vamos analisar a frase seguinte:

"Esta sentença é falsa".

Se ela é verdadeira, o conteúdo da frase se cumpre, ou seja, ela é falsa!. Resta o caso dela ser falsa, assim o seu conteúdo "Esta sentença é falsa " falha, ou seja, ela é verdadeira! Esta "ingênua " sentença é conhecido como o paradoxo de Eubulides de Mileto.

Para evitarmos situações deste tipo, vamos considerar apenas sentenças declarativas "bem-comportadas".

Definição 2.1. *Proposição* é uma sentença declarativa que é verdadeira ou falsa, mas não ambas.

Uma proposição assume apenas um dos valores: *verdadeira* (**V**) ou falsa (**F**). Assim, adotaremos dois princípios :

Princípio de não contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo

Príncipio do terceiro excluído: Toda proposição é verdadeira ou falsa, não há terceira possibilidade.

Exemplo 2.2. Vejamos alguns exemplos de proposições:

(a) A lua é feita de queijo.

(b) 4 é um número primo.

(c) $3+3 = 6$.

(d) 4 é número positivo e 3 é par.

(e) Choveu no Brasil em 12 de abril de 1523.

(f) 4 é número positivo ou 3 é par.

(g) A Terra gira em torno do Sol.

As afirmações (a), (b), (d) são proposições falsas, enquanto (c), (f), (g) são verdadeiras. Embora (e) seja uma proposição, pois esta sentença é verdadeira ou não, não temos como determinar seu valor-verdade.

Exemplo 2.3. As seguintes sentenças não são proposições: (a) x=3, (b) Você está bem ?, (c) Vá embora !

O primeiro item representa uma sentença declarativa mas não uma proposição, pois seu valor-verdade depende do valor atribuído a x (estudaremos tais sentenças no cálculo de predicados). Os casos restantes nem são declarações.

Adotaremos letras maiúsculas para representação de proposições, em geral P, Q, R, S,... Por exemplo, podemos denotar por P a proposição "4 é número positivo", ou simplesmente, P : "$4 > 0$" ou $P :=$ "$4 > 0$". Caso não seja especificado, P representará uma proposição qualquer.

3 Conectivos Lógicos

Proposições podem ser combinadas coerentemente através de conectivos lógicos, gerando sentenças mais ricas. Alguns dos conectivos que estudaremos são: negação $\sim$, conjunção lógica $\wedge$, disjunção lógica $\vee$. Nas formas $P \wedge Q$, $P \vee Q$, P, Q são chamados operandos e os conectivos $\vee, \wedge$, são chamados operadores lógicos .

Operadores lógicos ou conectivos lógicos efetuam operações sobre as proposições do mesmo modo que adição é um operação sobre os números, ou que a interseção é operação sobre os conjuntos. Quando um operador lógico é usado para construir uma nova proposição, seu valor-verdade depende da natureza dos operadores lógicos usados e do valor-verdade das proposições originalmente dadas. Discutiremos agora como os operadores lógicos afetam o valor-verdade das proposições. Veremos que os significados dos operadores lógicos nem sempre coincidem com aqueles usados na nossa língua.

3.1 O operador negação: $\sim$

Denotando por P: "4 é positivo", a proposição $\sim P$ pode ser interpretada por: "nao é o caso de 4 ser positivo", ou ainda, "não é verdade que 4 é positivo", ou em linguaguem matemática, "$4 \leq 0$". Sabemos que P é verdadeira e também que a sua negação, $\sim P$, é falsa. Para o caso geral, quando P representa uma proposição qualquer, o valor de $\sim P$ assume valor diferente de P. Este fato pode ser representado através da seguinte tabela-verdade:

P	$\sim P$
V	F
F	V

3.2 O operador conjunção: $\wedge$

Representa intuitivamente o papel análogo ao conectivo “e” da Língua Portuguesa. O item (d) do exemplo 2 pode ser representado por $P \wedge Q$, onde P : “$4 > 0''$ e Q : “3 é par”. Neste caso, sabemos que $P \wedge Q$ é falsa, pois falha a proposição Q. Em analogia ao conectivo “e”, para o caso geral, $P \wedge Q$ será verdadeiro desde que ambas as componentes P e Q sejam verdadeiras. O valor-verdade de $P \wedge Q$ segue a tabela:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3.3 O operador disjunção: $\vee$

Funciona como o conectivo “ou”. Considerando as mesmas proposições acima, a proposição $P \vee Q$ simboliza o item f do Exemplo 1, cujo valor-verdade é determinado pelo de P, pois Q falha. No caso geral, para $P \vee Q$ ser verdadeira basta que tenhamos pelo menos uma das componentes válida. O valor-verdade de $P \vee Q$ segue a tabela:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observação 3.1. Em algumas situações cotidianas, o “ou” da Língua portuguesa funciona com sentido de “ou exclusivo”, cujo significado difere do usado aqui. Um exemplo do “ou exclusivo” segue. Num supermercado, a mãe diz: “Filho, escolha sorvete ou chocolate.” Esta difícil decisão imposta ao garoto acontece (é verdadeira) desde que escolha uma e apenas uma das opções. “ Zé é paulista ou paranaense” exemplifica outra situação do ou exclusivo.

Para o nosso propósito, $P \vee Q$ é verdadeiro também quando ambas as proposições originais o são

3.4 O operador condicional: $\rightarrow$

Notação: $P \rightarrow Q$ (P: *antecedente ou hipótese*, Q: *consequente ou conclusão*).

Ilustremos inicialmente uma interpretação do conectivo $\rightarrow$ através da sentença

“Se Gustavo ganhar na próxima loteria, pagará churrasco.”

Definindo-se P: “Gustavo ganha na próxima loteria” e Q:“Gustavo paga churrasco”, $P \rightarrow Q$ representa a promessa de Gustavo.

Vamos analisar quando a promessa será cumprida. Primeiro caso : digamos que ele ganhe (P é V). Pode acontecer de ele pagar o churrasco (Q é V), cumprindo a promessa ($P \rightarrow Q$ é V). Por outro lado, Gustavo pode não pagá-lo, descumprindo a promessa ($P \rightarrow Q$ é F). Segundo caso: digamos que Gustavo não ganhe (P é F). Neste caso, independente de pagar ou não um churrasco, (Q é V ou F), a promessa não foi descumprida ($P \rightarrow Q$ é V). Observe que a única possibilidade de $P \rightarrow Q$ ser falsa é quando P é V e Q é F . Nós esperamos que tal operação funcione de maneira similar ao modelo acima, desta forma, quando P e Q assumirem proposições arbitrárias, $P \rightarrow Q$ será regida pela tabela seguinte:

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A proposição $P \rightarrow Q$ pode ser lida de vários modos: "se P, então Q"; "P é suficiente para Q"; "Q é necessário para P"; "Q se P "; "Q segue de P "; " Q desde que P "; "Q é consequência de P ".

Na língua portuguesa, o uso do condicional estabece uma relação de causa e efeito, ou relação de "herança" entre a hipótese e a conclusão. Assim, "se eu cair no lago, ficarei molhado" relaciona uma causa a seu efeito. O condicional "se eu sou homem, então sou mortal" caracteriza uma propriedade intrínsica à raça humana.

Entretanto, no condicional lógica $P \rightarrow Q$, a hipótese P não precisa estar relacionada à conclusão Q. Isto pode causar alguma estranheza e confusão. Por exemplo, se P:="laranjas são pretas" e Q:="a Terra é plana", $P \rightarrow Q$ representa a sentença "se laranjas são pretas, então a Terra é plana", que é destituído de "sentido" na Língua Portuguesa. Como P é falso, pela tabela verdade, $P \rightarrow Q$ é verdadeira, mesmo não existindo alguma relação de causa e efeito entre as proposições envolvidas .

3.5 O operador bicondicional : $\leftrightarrow$

É definido pela composição de operações: $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$. A sua tabela fica:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Note que $P \leftrightarrow Q$ vale quando P e Q possuem mesmo valor.

Algumas leituras mais usuais de $P \leftrightarrow Q$ são: "P é causa e consequência de Q "; "P é condição necessária e sufiente para Q "; "P se e somente se Q".

Exemplo 3.2. Retornemos ao caso já visto: P:"Gustavo ganha na próxima loteria" e

Q:"paga churrasco". Colocamos abaixo algumas fórmulas com respectivo sentido:

$P \to Q$: "Se Gustavo ganhar na próxima loteria, pagará um churrasco. "
$Q \to P$: "Se Gustavo pagar churrasco, então ele ganhou na loteria. "
$P \leftrightarrow Q$: "Gustavo pagará um churrasco se e apenas se ganhar na loteria."

As três sentenças são todos distintas e para elucidar melhor as diferenças, vamos considerá-las válidas, caso a caso. A primeira sentença, a promessa, inclui a possibilidade dele não ganhar na loteria, mas pagar o churrasco com outro recurso. No entanto, a segunda sentença, $Q \to P$, não permite tal possibilidade. Ela continua válida se ele não pagar churrasco e ganhar na loteria. Mas a terceira não permite tal possibilidade.

Exemplo 3.3. Outra ilustração de $P \leftrightarrow Q$: considere T um triângulo fixado de lados $a > b \geq c$ e defina P:"T é triângulo retângulo" e Q: "$a^2 = b^2 + c^2$ ". O clássico Teorema de Pitágoras com sua recíproca afirma que "T é triângulo retângulo se e somente se $a^2 = b^2+c^2$", ou ainda, $P \leftrightarrow Q$ acontece.

4 Tabelas-verdade

Um fato de importância fundamental: o valor-verdade de proposições compostas obtidas via combinação de conectivos fica completamente determinado pelos valores das proposiçoẽs componentes e pela natureza dos conectivos envolvidos.

Exemplo 4.1. Vamos construir a tabela verdade da fórmula $(P \vee \sim Q) \to Q$.Iniciamos exibindo as colunas de P e Q. Observe que há quatro linhas de valores, pois há 4 possibilidades de combinar os valores de P e Q. Na segunda etapa, construímos a coluna relativa a $\sim Q$. Em seguida, a etapa 3 combina os valores das colunas de P e da coluna $\sim Q$ usando o conectivo $\vee$. Finalmente, a última coluna construída será combinada com a coluna Q via análise do condicional. A tabela abaixo esquematiza os nossos raciocínios:

P	Q	$\sim Q$	$P \vee \sim Q$	$(P \vee \sim Q) \to Q$
V	V	F	V	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F
1	1	2	3	4

onde a última linha denota as estapas da construção. Em particular, quando P e Q são verdadeiras, então a fórmula acima é V (primeira linha); e quando P é V e Q é F, então a proposição é F; e assim em diante.

Exemplo 4.2. Vamos determinar a tabela-verdade de $S := (P \wedge Q) \vee \sim (P \to Q)$. Na forma de tabela

P	Q	$(P \to Q)$	$\sim (P \to Q)$	$P \wedge Q$	S
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F
1	1	2	3	3	4

Os valores-verdade da coluna S na etapa 5 é determinado segundo as colunas de $\sim$(P$\to Q$) e de (P$\wedge$Q) através da análise da tabela do $\vee$.

Exemplo 4.3. A tabela-verdade da proposição $R = (P \wedge Q) \vee (\sim (P \vee Q))$

P	Q	P$\wedge$Q	$\sim (P \vee Q)$	R
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	F	F	F
F	F	F	V	V
1	1	2	3	4

Observação 4.4. Cada proposição simples (âtomica) está sempre associado a dois valores auto-excludentes: verdadeiro ou falso. Um argumento combinatório mostra que a tabela verdade de uma fórmula composta por n proposições originais (atômicas) possui 2^n linhas. Um proposição gerada por 10 proposições atômicas necessita de 2^{10} linhas na composição de sua tabela verdade. Não é difícil exibir um método para simular computacionalmente a construção de tabelas-verdade. Como o número de linhas crece muito rápido, infelizmente nem sempre é viável fazer a tabela verdade de um proposição, mesmo com a ajuda de um computador.

Para termos uma ideia intuitiva do que estamos dizendo, imaginemos um algoritmo para executar a tabela-verdade de uma proposição qualquer. Suponha que um computador seja capaz de verificar 1 trilhão de linhas por segundo. Se a entrada é uma proposição formada por 100 proprosições atômicas, o computador demoraria aproximadamente $1,27.10^{30}$ segundos, ou seja, mais de 40 bilhões de anos!

Notação: Faremos uso de sinais: ( ); [ ],{ } para evitar ambiguidades, como por exemplo em $P \wedge Q \vee R$, que pode gerar confusão, pois há duas distintas interpretações, a saber: $(P \wedge Q) \vee R$ ou ainda $P \wedge (Q \vee R)$. Faça as respectivas tabelas-verdade para verificar a diferença.

Para evitar o uso excessivo de sinais, estabelecemos uma convenção de prioridade na aplicação dos conectivos. Adotamos os conectivos $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ e $\leftrightarrow$ em ordem decrescente de prioridade. Em outra palavras, o conectivo $\sim$ tem prioridade em relação aos outros, e ele age na proposição à direita mais próxima. Também por convenção, os conectivos $\wedge$ e $\vee$ possuem a mesma ordem de prioridade. Por exemplo, $P \vee Q \to R$ será entendido como $(P \vee Q) \to R$, enquanto que $\sim P \wedge Q$ representa $(\sim P) \wedge Q$.

5 Tautologias

Lembrando a promessa de Gustavo, $P \to Q$, ela assume valor V e F dependendo dos valores tomados em P e em Q. Mas vejamos um caso curioso:

Exemplo 5.1. Analisemos a proposição $[P \wedge (P \to Q)] \to Q$.

Primeiro método: Análogo ao caso anterior, via construção da tabela:

P	Q	(P →Q)	P∧(P →Q)	[P∧(P →Q)] → Q.
F	F	V	F	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V
1	1	2	3	4

Segundo método: Para evitarmos a elaboração da tabela acima, vamos proceder de forma indireta. Conside, a *princípio* , onde a nossa proposição poderia receber valor F. Analisando a tabela do condicional, o único caso seria quando: $P \wedge (P \to Q)$ for V e Q for F. Analogamente, para $P \wedge (P \to Q)$ ser V, teríamos obrigatoriamente que P é V e $P \to Q$ é V. Mas para $P \to Q$ se cumprir, teríamos:

- ou P é F (contrariando resultado prévio na linha acima).
- ou P é V e Q é V (novamente contrariando resultado prévio).

Ou seja, não há possibilidade alguma da proposição ser falsa.

Em contraste com a promessa de Gustavo, a proposição acima sempre é verdadeira (ver a coluna do passo 4), independente dos valores de P e Q. Isto motiva a definição:

Definição 5.2. Uma *tautologia* é uma proposição que assume sempre valor verdade V, independente dos valores verdade das proposições que a compõe. Por outro lado, uma *contradição* é uma proposição sempre falsa.

Um economista que disser "a inflação sobe ou não sobe"($P \vee \sim P$) corre o risco de ser acusado de incompetente, mas não de mentiroso. Independente do significado atribuído a P, $P \vee \sim P$ sempre é tautologia, enquanto que $P \wedge \sim P$ ilustra uma contradição.

É através das tautologias que podemos simplificar expressões lógicas e criar regras de inferências (veremos mais tarde este conceito).

Observe que se C é contradição então $\sim C$ é tautologia. Além disto, se T representa uma tautologia, então $\sim T$ denota uma contradição.

5.1 Equivalências

Em computação, dois programas distintos podem executar a mesma tarefa, ambos utilizando tempos próximos na execução e mesmo gasto de memória. Neste caso, é natural dizer que eles são programas equivalentes. A expressão algébrica $(x-1).(x+1)$ equivale a x^2-1. Embora ambas sejam idênticas numericamente, há uma diferença do ponto de vista computacional, pois a primeira expressão exige 3 operações, enquanto que a segunda, apenas duas.

Assim como na álgebra, seria de grande interesse se pudéssemos simplificar expressões lógicas. Para atingir tal objetivo, definimos o conceito de equivalência lógica.

Definição 5.3. Duas proposições P e Q são *equivalentes* (notação: $P \equiv Q$ ou $P \Leftrightarrow Q$) se P é V quando e apenas quando Q é V. Em outras palavras, $P \equiv Q$ se e somente se P$\leftrightarrow$Q for tautologia. Neste caso, dizemos P e Q formam uma identidade lógica.

Por exemplo, $\sim (\sim P)$ e P são claramente equivalentes. As fórmulas $\sim (P \vee Q)$ e $(\sim P) \wedge (\sim Q)$ ilustram outro exemplo importante de identidade lógica.

Exemplo 5.4. $P \to Q \equiv (\sim P \vee Q)$. De fato,

P	Q	$P \to Q)$	$\sim P \vee Q$	$(P \to$Q$) \leftrightarrow \sim P \vee Q.$
F	F	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V
1	1	2	2	3

Repare que as colunas 2 coincidem em todas as linhas. Como comentamos, $P \to Q \equiv \sim P \vee Q$, pois $(P \to Q) \leftrightarrow \sim P \vee Q$ é uma tautologia (ver coluna da etapa 3).

Verifique as seguintes identidades lógicas abaixo.

Lista 1 - identidades lógicas

	identidade	**nome**	**sigla**
1	$P \equiv (P \vee P)$	idempotência de $\vee$	IDN
2	$P \equiv (P \wedge P)$	idempontência de $\wedge$	IDN
3	$(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$	comutatividade de $\vee$	COM
4	$(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P)$	comutatividade de $\wedge$	COM
5	$[(P \vee Q) \vee R] \equiv [P \vee (Q \vee R)]$	associatividade de $\vee$	ASS
6	$[(P \wedge Q) \wedge R] \equiv (P \wedge (Q \wedge R)]$	associatividade de $\wedge$	ASS
7	$\sim (P \wedge Q) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$	lei de De Morgan	DM
8	$\sim (P \vee Q) \equiv (\sim P \wedge \sim Q)$	lei de De Morgan	DM
9	$[P \wedge (Q \vee R)] \equiv [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$	distributiva de $\wedge$ sobre $\vee$	DIST
10	$[P \vee (Q \wedge R)] \equiv [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$	distributiva de $\vee$ sobre $\wedge$	DIST
11	$P \equiv \sim (\sim P)$	dupla negação	DN
12	$(P \to Q) \equiv (\sim P \vee Q)$	definição de condicional	DC
13	$(P \leftrightarrow Q) \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	definição de quivalência	DE
14	$[(P \wedge Q) \to R] \equiv [P \to (Q \to R)$	exportação	EX
15	$[(P \to Q) \wedge (P \to \sim Q)] \equiv \sim P$	absurdo	ABS
16	$(P \to Q) \equiv (\sim Q \to \sim P)$	contrapositiva	CP
17	$P \to Q \equiv (P \wedge \sim Q) \to C$ C: contradição	redução ao absurdo	R

Observação 5.5. Note que $\equiv$ é uma relação de equivalência, ou seja, é reflexiva, simétrica e transitiva.

Observação 5.6. A operacão bicondicional foi definida através dos conectivos $\rightarrow$ e $\wedge$. Por sua vez, o condicional (regra 12 acima, Exemplo 5.4) pode ser definida via $\sim$ e $\vee$. Pela lei de De Morgan (ver 7, lista acima), $\sim(P \wedge Q) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$. Ora, como elas são equivalentes, suas respectivas negações também o são: $\sim(\sim(P \wedge Q)) \equiv \sim(\sim P \vee \sim Q)$. Por outro lado, (regra 11- lista 1), a primeira proposição é equivalente a $P \wedge Q$. Por último, pela transitividade de $\equiv$, $P \wedge Q \equiv \sim(\sim P \vee \sim Q)$ Assim, obtemos $\wedge$ a partir de $\vee$ e $\sim$. Logo, estas duas últimas operações são suficientes para construírmos todos os conectivos vistos.

Exemplo 5.7. O seguinte anúncio educativo tem aparecido em rede nacional. "O Ministério da Saúde adverte:

F_1 := Se beber, não dirija.
F_2 := Se dirigir, não beba."

O telespectador pode ter a impressão de que recebeu dois conselhos distintos, já que são frases distintas. Do ponto de vista lógico, há apenas uma duplicação do mesmo conselho. De fato, intuitivamnte as "proposições" $P :=$"beber" e $Q :=$"dirigir" simulam as frases da seguinte forma: $F_1 \equiv P \rightarrow \sim Q$ e $F_2 \equiv Q \rightarrow \sim P$. Mas tais frases são equivalentes, pela contrapositiva e dupla negação.

As identidades são usadas para simplificar uma proposição dada. Por exemplo, vamos determinar uma fórmula equivalente a $U = (P \wedge Q) \rightarrow (\sim P \vee Q)$ sem usar o conectivo $\wedge$. Temos que: $P \wedge Q \equiv \sim(\sim P \vee \sim Q)$ e também que $\sim P \wedge Q \equiv \sim(\sim\sim P \vee \sim Q)$ (feitos na obs. anterior). Substituindo ambas as formas acima em U, obtemos: $U \equiv \sim(\sim P \vee \sim Q) \rightarrow \sim(\sim\sim P \vee \sim Q)$, e usando regras 3 e 12, $U \equiv \sim(P \rightarrow Q) \rightarrow \sim(Q \rightarrow P)$.

5.2 Implicações

Tautologias envolvendo o operador $\rightarrow$ são tão importantes que recebem um nome especial.

Definição 5.8. Dadas duas proposições quaisquer P e Q, dizemos que "P *implica* Q", denotado por $P \Rightarrow Q$, quando o condicional $P \rightarrow Q$ for uma tautologia.

Elencamos uma pequena lista de tautologias envolvendo condicionais (implicações) e respectivos nomes.

Lista 2: implicações

	implicação	**nome**	**sigla**
1	$P \Rightarrow (P \vee Q)$	adição	AD
2	$(P \wedge Q) \Rightarrow P$	simplificação	SIM
3	$[P \wedge (P \rightarrow Q)] \Rightarrow Q$	modus ponens	MP
4	$[(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q] \Rightarrow \sim P$	modus tollens	MT
5	$[\sim P \wedge (P \vee Q)] \Rightarrow Q$	silogismo disjuntivo	SD
6	$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \Rightarrow (P \rightarrow R)$	silogismo hipotético	SH

Verificar as tautologias acima.

6 Inferência

Em nosso cotidiano estamos acostumados a *tirar certas conclusões*, partindo de informações fornecidas. Vejamos duas situações

Situação 1: Quando alguém diz:

"Gustavo ficou molhado porque caiu no lago",

inferimos mentalmente que essa pessoa nos prestou uma informação que se traduziria de modo mais completo nesta forma:

Se Gustavo cair no lago, ficará molhado.
Gustavo caiu no lago.
___
Gustavo ficou molhado.

Admitimos que as duas informações escritas sobre o traço horizontal são verdadeiras: a primeira, porque a ela nos habituamos através de experiências e constatações (quem cai num lago costuma ficar molhado - em condições "normais") a segunda porque a informação nos foi explicitamente fornecida (o fenõmeno cair no lago aconteceu). Nossa conclusão é legítima - a conclusão é verdadeira e não pode deixar de ser verdadeira.

Vejamos de que maneira o raciocínio se apresenta, usando enunciados simbólicos:

$$\begin{array}{l} \mathrm{P}\rightarrow Q \\ \underline{\mathrm{P}\qquad\quad} \\ \mathrm{Q} \end{array}$$

onde as proposições P="Gustavo cai no lago"e Q ="Gustavo fica molhado. "Como P e $Q \to Q$ são verdadeiros, e lembrando que $\mathrm{P}\wedge(\mathrm{P}\rightarrow Q) \Rightarrow Q$ é uma tautologia, obtemos que a nossa conclusão: Q é verdadeira, Nosso raciocínio foi legítimo, não passamos de informações verdadeiras para conclusões que poderiam, eventualmente, mostrar-se falsas.

Situação 2: Vamos alterar os significados (semântica) das proposições acima. Retornamos à situçao apresentada na definição do condicional, assumimos agora a validade da promessa $P \to Q$ de Gustavo (vamos por um momento considerá-la verdadeira - ele sempre cumpre as promessas). Até aqui não podemos concluir nada. No entanto, se ele ganhar na loteria (P se cumpre), então agora sim podemos concluir que o churrasco será realizado (Q é V).

Ambas as situações são representadas pelo mesmo esquema acima. É plausível então admitirmos que o argumento

$$P \to Q \text{ e } P \text{ então } Q$$

sempre se verifica, independente dos significados atribuídos às proposições.

A *dedução* pretende assegurar-nos a verdade da conclusão, quando partimos de informacões verdadeiras. Ela nos dá garantias de que a verdade foi preservada.

De um modo geral, aquilo que nos baseamos em raciocínios e inferências e assumidos verdadeiros são as *premissas*, o ponto a que chegamos é a *conclusão.* A coleção de sentenças que "traduzem" o pensamento é o *argumento.*

Adotaremos uma forma padronizada para escrever os argumentos , colocando as premissas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (proposições que já sabemos ser verdadeiras, ou nos foi dado, ou simplesmente assumidas verdadeiras) sobre um traço horizontal e, em seguida, a conclusão A_{n+1}. Assim, denotaremos o argumento por

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \underline{A_n \qquad} \\ A_{n+1}, \end{array} \tag{6.1}$$

ou ainda na forma concisa

$$A_1; A_2, \ldots, A_n \vdash A_{n+1}$$

Dado o argumento acima, vamos associá-la ao condicional:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to A_{n+1}$$

conforme resultado abaixo.

Teorema 6.1. *O argumento acima é legítimo se e somente se o condicional associado*

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to A_{n+1}$$

é tautológico.

Demonstração: Se o argumento é legítimo(sempre obtemos verdades), então impede que as premissas sejam V e a conclusão F de modo que o condicional associado sempre assume valor V, gerando uma tautologia. Reciprocamente, sendo o condicional acima tautológico, é facil verificar que o argumento é legítimo. □

Uma lista de argumentos legítimos, que nos ajudam a obter conclusões, já foi elencada na lista de tautologias, que passamos a chamá-las *regras de inferência* (ver Lista 2). Destacamos abaixo alguns delas.

Lista 3 - Principais Regras de inferências:

$$\frac{P}{(P \vee Q)} \quad \textit{adição - AD} \qquad\qquad \frac{P \wedge Q}{Q} \quad \textit{simplificação} \text{ - SIM}$$

$$\frac{\begin{array}{l} P \to Q \\ P \end{array}}{Q} \quad \textit{modus ponens - MP} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{l} P \to Q \\ \sim Q \end{array}}{\sim P} \quad \textit{modus tollens - MT}$$

$$\frac{\begin{array}{l} P \vee Q) \\ \sim P \end{array}}{Q} \quad \textit{silogismo disjuntivo - SD} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{l} P \to Q \\ Q \to R \end{array}}{P \to R} \quad \textit{silogismo hipotético - SH}$$

Exemplo 6.2. Verifique o argumento: “Se 4 não é par, então 5 não é primo.” “O número 5 é primo”. Logo, “4 é par”.

Chamando, $P :=$“4 é par” e $Q :=$ “5 é primo”. O argumento equivale ao formato

$$\begin{array}{ll} 1. & \sim P \to \sim Q \\ 2. & \underline{Q \qquad\quad} \\ & \quad P \end{array}$$

Um aplicação da regra *Modus Tollens* (MT) justifica a conclusão.

Exemplo 6.3. Condire as premissas: “Se o dia estiver quente, irei nadar ”. “Se eu for nadar, não estudarei ” Logo, podemos concluir que :“Se o dia estiver quente, não estudarei.” Aqui usamos a regra 6 (silogismo hipoético), onde P, Q e R denotam respectivamente as sentenças:“ o dia está quente ”; “eu vou nadar ”, “ não vou estudar ”. Note que a conclusão $P \to R$ é uma sentença condicional. Se incluirmos a premissa P, através de MP obtemos a conclusão R. Todo o argumento pode ser esquematizado abaixo:

1	$P \to Q$	premissa 1
2	$Q \to R$	premissa 2
3	P	premissa 3(adiciona na segunda parte)
4	$P \to R$	primeira conclusão (linhas 1, 2, SH)
5	R	conclusão da segunda parte (linhas 3, 4, MP)

Observe que a primeira conclusão (linha 4) foi usada como premissa, pois já faz parte do nosso repertório de informações válidas.

Observação 6.4. Note que o significado atribuído a cada proposição é irrelevante para a conclusão. Em outras palavras, sempre que tivermos as 3 premissas anteriores, poderemos concluir a validades de R.

Ilustremos uma aplicação do cálculo proposicional.

Exemplo 6.5. Imagine Flávio, um químico, na seguinte experiência e constatou os fatos:

- Flávio notou que o papel de tornasol ficou vermelho ao ser posto em ácido.
- Verificou que ficou azul ao ser posto em solução alcalina.
- Agora, Flávio está colocando o papel em solução alcalina ou ácida.
- Ele observou que o papel naõ ficou azul.
- Concluiu que o papel ficou vermelho.

O argumento pode ser colocado na forma:

$$A \to V; B \to Z; A \vee B; \sim Z \vdash V$$

onde : A: ácido, B: base, V: vermelho, Z: azul. As premissas são verdadeiras, pois são fatos da experiência. Podemos enumerá-las

1.	$A \to V$	Premissa
2.	$B \to Z$	Premissa
3.	$A \vee B$	Premissa
4.	$\underline{\sim Z \quad .}$	Premissa

Aplicamos Modus Tollens (MT) nas linhas 2. e 3. e obtemos a conclusão exibida na linha 5.

$$5 \qquad \sim B \qquad (3, 2, MT.)$$

deixando explícito entre parênteses as premissas (linha 2 e 3) usadas e a regra de inferência em questão (no caso, MT.). Portanto a conclusão da linha 5 é verdadeira e podemos usá-la agora como uma nova premissa. Agora, usando silogismo disjuntivo (SD) nas linhas 4 e 5, obtemos a conclusão:

$$6 \qquad A \qquad (4, 5, SD.)$$

Finalmente, usando Modus Ponens nas linhas 1 e 6, chegamos à conclusão desejada:

$$7 \qquad V \qquad (1, 6, MP.)$$

ou seja, realmente está certa a conjectura de Flávio.

Exemplo 6.6. Vamos analisar o argumento:“ Se estudo ou se eu sou um gênio, então eu passarei nesta disciplina. Se eu passar nesta disciplina, então estarei automaticamente inscrito na próxima disciplina. Portanto, se eu não estiver inscrito na próxima disciplina, eu não sou um gênio.”

Tomando-se: S: “ eu estudo ” ; G: “ eu sou gênio ” ; P: “ eu passarei no curso ”; A: “ eu estarei inscrito no próximo curso ”, o argumento fica:

$$(S \vee G) \to P; P \to A \vdash \sim A \to \sim G$$

Vamos verificar o argumento, como no exemplo anterior.

1.	$(S \vee G) \to P$	Premissa
2.	$P \to A$	Premissa

Inicialmente incluiremos uma premissa (linha 3) que já faz parte do nosso conhecimento, e o argumento segue:

3.	$G \to (G \vee S)$	adição (regra)	
4.	$G \to (S \vee G)$	3.	comutatividade
5.	$G \to P$	4, 1	silogismo hipotético
6.	$G \to A$	5, 2	silogismo hipotético
7.	$\sim A \to \sim G$	6	contra-positiva

portanto, o argumento é legítimo.

Como ilustrado nos exemplos acima, cabe ressaltar que inferências conseguem modelar muitas decisões tomadas em nosso cotidiano.

Por que seguir este procediemnto "complicado"? O Teorema 6.1 afirma que basta fazer uma tabela-verdade para verificar ou não se um argumento é legítimo. Infelizmente a verificação por tabela verdade é um processo computacional inviável, de acordo com a Observação 4.4. Na prática, a validade de um argumento é verificado conforme método acima através de um pequena lista de identidades lógicas e uma pequena lista de implicações.

Definição 6.7. *Falácias* ou sofismas são argumentos que resultam de inferências incorretas.

Exemplo 6.8. Considere o raciocínio:

> "Se o réu é culpado, ele ficará nervoso quando interrogado
> O réu estava muito nervoso quando foi interrogado
> Portanto, o réu é culpado."

cuja representaçã na forma lógica é

$$P \to Q; Q \vdash P$$

Tal argumento não é correto porque a conclusão P pode ser falsa, embora $P \to Q$ e Q sejam válidos, basta verificar que condicional associado $[(P \to Q) \wedge Q] \to P$ não é tautologia, caracterizando uma falácia.

Exemplo 6.9. Vejamos outro exemplo de sofisma:

> "Se o réu tinha as mãos cobertas de sangue, então ele é o assassino
> As maãos do réu estavam limpas.
> Portanto, o réu é inocente."

Este argumento ignora a esperteza do criminoso, que lava as mãos imediatamente após cometer um crime.

7 Métodos de inferência

Estamos interessados em apresentar as principais técnicas de inferência nesta seção. Consideremos o argumento

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A_{n+1} \tag{7.1}$$

formado por n hipóteses e a tese A_{n+1}. Os métodos mais usadas para legitimar tal argumento são descritos abaixo.

7.1 Demonstração direta

A demonstração *direta* consiste em uma sequência que combina inferências (baseadas nas regras de inferência), e possivelmente equivalências lógicas sobre as hipóteses $A_1, A_2, \ldots, A_n$ até chegar na tese A_{n+1}.

Todas as inferências vistas na Seção 6 utilizam o método direto.

7.2 Demonstração condicional ou direta-condicional

Apesar da versatilidade do método direto, nem sempre é fácil inferir a tese. Aqui o método pode facilitar a prova quando a tese é um condicional, digamos $A_{n+1} = P \to Q$. O argumento fica

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash P \to Q \tag{7.2}$$

O *método condicional* consiste em adicionar a proposição P como hipótese, e simplesmente provar Q. Esquematicamente, provamos o argumento

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, P \vdash Q. \tag{7.3}$$

A explicação segue. O argumento em (7.2) é legítimo se, e somente se, o "condicional associado"

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to (P \to Q)$$

é tautológico, pelo Teorema 6.1. Novamente pelo Teorema 6.1, o "condicional associado" ao argumento (7.3) é

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge P) \to Q$$

Queremos provar a equivalência destes condicionais. Se a proposição P é F, então automaticamente os dois condicionais associados são V. O caso crucial vem agora: se a proposição P é V (neste caso, P pode ser considerada um hipótese - a hipótese adicionada em (7.3)). Uma simples análise mostra que $P \to Q$ será V se, e somente se, a proposição Q for V (a nova tese no argumento (7.3)). Os condicionais associados são equivalentes, donde o argumento (7.2) é legítimo se, e somente se, o argumento (7.3) é legítimo.

Exemplo 7.1. Demonstrar a validade do argumento

$$\frac{(P \vee Q) \wedge R}{(\sim P) \to Q}$$

Pelo método condicional, o argumento transforma-se em

$$\begin{array}{ll} 1. & (P \vee Q) \wedge R \\ 2. & \underline{\sim P \quad\quad} \\ & Q \end{array}$$

cuja prova segue

$$\begin{array}{lll} 3. & P \vee Q & (1,\text{ SIM}) \\ 4. & Q & (2{,}3,\text{ MP}) \end{array}$$

7.3 Demonstração pela contrapositiva

Este método também pode ser aplicado quando a tese é um condicional, digamos $A_{n+1} = P \to Q$. O argumento fica

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash P \to Q \tag{7.4}$$

O *método por contrapositiva* consiste em adicionar a proposição $\sim Q$ como hipótese, e simplesmente provar $\sim P$. Em outras palavras, provamos o argumento

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \sim Q \vdash \sim P. \tag{7.5}$$

A explicação segue. A proposição $P \to Q$ é V se e somente se $\sim Q \to \sim P$ é V, pela regra contrapositiva (daí o nome). Aplicamos agora o método condicional sobre a tese $\sim Q \to \sim P$ para obtermos o argumento (7.5).

Exemplo 7.2. Retornemos ao argumento apresentado no Exemplo 7.1. A inferência por contrapositica corresponde a:

$$\begin{array}{ll} 1. & (P \vee Q) \wedge R \\ 2. & \underline{\sim Q \quad\quad} \\ & \sim\sim P. \end{array}$$

Uma inferência viável é

$$\begin{array}{lll} 3. & P \vee Q & (1,\text{ SIM}) \\ 4. & P & (2{,}3,\text{ SD}). \end{array}$$

7.4 Demonstração por contradição ou indireta

O método *por contradição* ou *indireto* consiste em assumir que a tese é falsa (adicionando a hipótese $\sim A_{n+1}$) e obter como conclusão uma contradição C, geralmente do tipo $P \wedge \sim P$. Esquematicamente, provamos

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \sim A_{n+1} \vdash C. \tag{7.6}$$

Vamos tentar justificar. Pelo Teorema 6.1, o "condicional associado" ao argumento é

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \to A_{n+1}$$

O ponto principal da justificativa: $A_{n+1} \equiv\sim (A_{n+1}) \to C$, onde C denota uma contradição. Com a substituição acima, a tese passa a ser um condicional. Aplicando o método condicional sobre esta nova tese $\sim (A_{n+1}) \to C$, o argumento equivalente fica

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \sim A_{n+1}) \to C$$

Exemplo 7.3. Ilustramos como fica a prova por contradição do Exemplo 7.1. Basta legitimar

$$\begin{array}{cl} 1 & (P \vee Q) \wedge R \\ 2 & \underline{\sim (\sim P \to Q)} \\ & C \end{array}$$

Uma inferência do argumeto acima é

$$\begin{array}{lll} 3. & P \vee Q & (1, \text{SIM}) \\ 4. & \sim (P \vee Q) & (2, \text{DC}) \\ 5. & C & (3{,}4\ ) \end{array}$$

Referências

[1] W.A. Carnielli, *Introdução à Lógica - Notas de aula*, IMECC-Unicamp, (1991).

[2] S.S. Epp, *Discrete Mathematics with Applications*, Wadsworth Publ., New York, USA, (1990).

[3] H.G. Camphell e R.E. Spencer, *Finite Mathematics*, Macmillian Publ., Canadá, (1974).

[4] L. Hegenberg, *Lógica, Simbolização e Dedução*, EDUSP, Universidade de São Paulo, (1975).

[5] R. Johnsonbaugh, *Essencial Discrete Mathematics*, Macmillian Publ., New York, (1987).

[6] P. Suppes e S. Hill, *Primeiro curso de lógica matemática*, Ed. Reverté, (1968).

[7] A. Tarski, *Introduccioón a la lógica, y a la metodología de las ciencias deductivas*, Espasa-Calpe, Madrid, (1968).